

О.И.Никонов, докт. физ.-мат. наук, проф.  
М.А.Медведева, Д.С.Египцев  
ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, Екатеринбург

## **ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМЫ СБЫТА ПРОДУКЦИИ: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

В работе рассматривается экономико-математическая модель формирования рациональной, выгодной для фирмы-поставщика структуры поставок, с учетом присутствующих в системе случайных возмущений и сохранения уровня формализованного риска операций. Используются подходы и методы финансовой математики, применяемые в теории портфельных инвестиций [1-3].

**Введение.** Организация процесса сбыта готовой продукции на производственном или торгово-закупочном предприятии обычно предполагает работу с рядом предприятий-потребителей, в качестве которых могут выступать оптовые, мелкооптовые торговые фирмы и учреждения розничной торговли. Названные предприятия-потребители имеют, как правило, различные характеристики, определяющие для поставщика степень эффективности их использования в качестве своих контрагентов. При большом числе контрагентов правильная организация поставок, связанная с распределением объемов поставляемой продукции между контрагентами, может существенно повысить эффективность деятельности предприятия.

Точнее, речь идет об организации такой системы поставок, которая корректно учитывала бы колебания доходностей отдельных операций по поставкам продукции. Названные колебания могут возникать в связи с различными обстоятельствами, например, в связи с нерегулярностью выплат за поставленную продукцию. При этом данная нерегулярность может носить объективно случайный характер, определяться спросом на продукцию, колебаниями цен и иными причинами, влияющими на доходность операций случайным образом. В этом случае целесообразно применение экономико-математического инструментария, ориентированного на учет случайных возмущений и снижение риска потерь, вызванных случайными факторами.

В работе предлагается модель, позволяющая рассчитывать рациональную, выгодную для фирмы-поставщика структуру поставок, обеспечивающую наибольшие доходность и коэффициент оборачиваемости с учетом сохранения уровня формализованного должным образом риска операций. Используются подходы и методы финансовой математики, применяемые в теории портфельных инвестиций.

Модель апробирована на данных нескольких торгово-посреднических фирм. Результаты по одной из них, занимающейся поставками фармацевтических препаратов сети мелкооптовых покупателей, приведены в настоящей работе. Результаты апробации показали эффективность развиваемого подхода.

**Оценка доходности поставок.** Упрощенная формула для доходности единичной операции по поставке партии товара конкретному предприятию-потребителю может быть представлена следующим образом:

$$r = \frac{S_T - S_0}{S_0} \cdot \frac{365}{T} \cdot 100\% \quad (1)$$

Здесь  $r$  – доходность операции в процентах годовых,  $S_T$  – цена для потребителя;

$S_0$  – цена для поставщика (себестоимость или цена закупки товара);

$T$  – время в днях от момента поставки до момента оплаты.

При работе с каждым конкретным потребителем величина  $r$  варьируется в зависимости от вида и времени поставок. Как отмечалось во введении, в ряде ситуаций эти колебания носят объективно случайный характер, однако в целом поведение доходности отражает свойства предприятия-потребителя, характеризующие целесообразность его использование поставщиком в качестве своего партнера. Эту характеристику потребителя, трактуемую как случайную величину в математическом смысле данного термина, мы будем использовать в дальнейших построениях.

Формула (1) легко модифицируется для случая, когда доходность целесообразно оценивать в процентах за иной период времени, например, за месяц, когда требуется учитывать какие-либо дополнительные факторы – инфляцию и др. Особенно простой вид приведенное выражение приобретает в случае, когда речь идет о торгово-закупочной фирме, реализующей закупленный товар с фиксированной наценкой. В этом варианте доходность от реализации партии товара в процентах за месяц определяется соотношением

$$r = \frac{r_0}{T} \cdot 30, \quad (2)$$

где  $r_0$  – фиксированная наценка в процентах. Именно такая ситуация имеет место в рассматриваемом ниже примере, где вся неопределенность сосредоточена во времени  $T$ , проходящем от поставки до оплаты товара.

Для оценки случайной величины с неизвестным априори распределением обычно используют ее выборочные характеристики – выборочные математическое ожидание (среднее значение) и дисперсию либо среднеквадратичное отклонение (СКО). Первая оценка характеризует среднее ожидаемое значение, а вторая является мерой отклонения реальных значений случайной величины от ее среднего значения.

В финансовой математике, в частности, в теории портфельных инвестиций, дисперсию  $D(r)$  или СКО –  $\sigma(r)$  ассоциируют с риском, связанным с инвестициями в финансовый инструмент со случайной доходностью  $r$ .

Следуя описанному подходу, будем характеризовать предприятия-потребителей двумя скалярными характеристиками – математическим ожиданием  $M(r)$  доходности операций с ним и связанным с данным предприятием риском –  $\sigma(r)$ .

Следует иметь в виду, что как и в случае аналогичных построений с инструментами фондового рынка, величина  $\sigma(r)$  отражает далеко не все риски контрагента, здесь учитывается лишь статистический риск отклонения доходности от своего среднего значения. Представляется, однако, что  $\sigma(r)$  вполне может рассматриваться как мера надежности партнера.

Вычисление конкретных значений для оценок величин  $M(r)$  и  $\sigma(r)$  производится по стандартным формулам и правилам на основании имеющейся статистики работы с предприятием. Для этого надлежит обработать выборочные значения величины  $r$ , за исследуемый промежуток времени. Если сделки с потребителем совершаются регулярно, необходимый набор значений реализовавшихся параметров  $S_0, S_T$  и  $T$  в случае использования соотношения (1) либо  $r$  и  $T$  при работе по формуле (2) может быть получен из соответствующих бухгалтерских документов.

**Портфель поставок и его эффективность.** Предположим, что процедура, описанная в предыдущем разделе, проделана для каждого предприятия-поставщика. Имеем следующий набор данных: семейство выборок случайных доходностей  $r_j$ , оценки математических ожиданий  $M(r_j)$  и среднеквадратичных отклонений  $\sigma(r_j)$ . Здесь индекс  $j$  отвечает номеру предприятия-потребителя,  $j = 1, \dots, N$ ;  $N$  – общее количество потребителей.

Для того, чтобы определить усредненное (ожидаемое) значение доходности предприятия-поставщика при работе со всеми контрагентами, надлежит определить доли  $y_j$  всего капитала, сосредоточенного в отгруженной продукции, приходящиеся на каждого потребителя. Заметим, что для фиксированного временного промежутка это уже менее тривиальная задача, и прямая аналогия с инвестиционным портфелем на фондовом рынке здесь нарушается. Действительно, отгрузив определенное количество товара потребителю, поставщик в принципе не может в произвольный момент времени вернуть наращенный капитал в соответствии с рассчитанной доходностью, поскольку промежутки от отгрузки до оплаты различны и пересекаются между собой. Речь может идти либо об усредненных долях, рассчитанных на достаточно большой промежуток времени, либо следует скорректировать правила для вычисления доходностей от работы с одним контрагентом.

Как показывают эксперименты, оба варианта достаточно реальны. Первый полезен при долгосрочном, стратегическом планировании организации работы с предприятиями-потребителями и позволяет определить примерные рациональные доли продукции, поставляемой конкретным потребителям в течение достаточно продолжительного промежутка времени. Данный способ применим при наличии устойчивых характеристик контрагентов и долгосрочных устойчивых связях с ними.

Второй вариант позволяет получать результаты, пригодные для краткосрочного, тактического планирования структуры поставок, однако его реализация требует дополнительного учета особенностей взаимодействия с конкретными потребителями и модификации расчетных формул. Пример такой моди-

фикации будет приведен ниже при рассмотрении деятельности конкретного предприятия.

Если предположить, что доли капитала в виде отгруженного товара, приходящиеся на каждого контрагента, могут быть так или иначе рассчитаны, то дальнейшие построения, направленные на рациональный выбор структуры поставок осуществляется следующим образом.

Ожидаемое значение доходности  $r = \sum_{i=1}^N r_i \cdot y_i$  операций от работы со всеми контрагентами при фиксированных долях  $y_i$ , рассчитывается стандартным образом:

$$M(r) = \sum_{i=1}^N M(r_i) \cdot y_i \quad (3)$$

Для того, чтобы вычислить совокупный статистический риск  $\sigma(r)$ , следует составить матрицу ковариаций  $V = \{\sigma_{jk}\}$ , где  $\sigma_{jk} = \text{cov}(r_j, r_k)$  - коэффициенты ковариаций, рассчитываемые по исходным выборкам заданных доходностей. Далее, для величины  $\sigma(r)$  имеем следующее представление

$$\sigma(r) = \left( \sum_{i,j=1}^N y_i \sigma_{ij} y_j \right)^{1/2} \quad (4)$$

Рассматриваемая при стандартной постановке задача предполагает поиск вариантов выбора долей, обеспечивающих максимально возможный уровень ожидаемой доходности при минимально возможном риске. Если на доли  $y_i$  нет иных ограничений, кроме условия

$$\sum_{i=1}^N y_i = 1, \quad (5)$$

то задача имеет хорошо известное явное решение, определяющее множество эффективных или недоминируемых портфелей.

Учитывая специфику области применения, можно утверждать, что упомянутое явное решение задачи едва ли может быть практически использовано, ввиду наличия ряда специфических ограничений на доли капитала, приходящегося на каждого потребителя. Последнее связано с необходимостью учета многочисленных ограничений по реструктуризации объемов поставляемых товаров, обусловленных, в частности, целесообразностью продолжения работы с тем или иным конкретным контрагентом в целях сохранения и расширения рынка, ограниченностью объемов поставок потребителям и др.

Таким образом, при применении данного подхода целесообразно не использовать явные решения задачи, получаемые при простейших ограничениях вида (5), а определять соответствующую реальной ситуации систему ограничений и непосредственно находить эффективные решения экстремальной задачи с двумя критериальными функциями (3)-(4). Одно из эффективных решений есть решение задачи:

$$\text{Максимизировать } M(r) = \sum_{i=1}^N M(r_i) \cdot y_i, \quad (6)$$

$$\text{При ограничениях } \sigma(r) = \left( \sum_{i,j=1}^N y_i \sigma_{ij} y_j \right)^{1/2} = \sigma^*, \quad y \in Y. \quad (7)$$

В последнем условии  $y = (y_1, \dots, y_N)$ , множество  $Y$  определяется неравенствами  $y_i \geq 0$ , соотношением (5) и дополнительными условиями, формализующими специфику конкретной ситуации. Символом  $\sigma^*$  обозначен фиксированный (желаемый) уровень статистического риска.

**Модифицированный вариант модели. Результаты апробации.** Как отмечалось во введении, модель была апробирована на данных нескольких торгово-закупочных фирм. Для этой категории предприятий деятельность по сбыту продукции и работа с предприятиями-потребителями является основной, и применение развиваемого подхода дает наиболее ясные, легко интерпретируемые результаты. В настоящем разделе мы последовательно опишем результаты применения предлагаемой методики к задаче повышения эффективности работы фирмы, занимающейся поставками фармацевтических препаратов сети мелкооптовых покупателей, состоящей из шестидесяти аптек Екатеринбурга и Свердловской области.

*Расчет выборочных доходностей.* В общем случае при перепродаже товаров для каждого наименования используется своя торговая наценка, а произвольная поставка состоит из нескольких видов товаров, сочетающихся в определенных пропорциях. Однако для рассматриваемого предприятия оказалось возможным считать, что для произвольной поставки средняя наценка одинакова для всех поставок и для всех предприятий-потребителей, которыми в данном случае являлись аптеки. Средняя торговая наценка  $r_0$  для всех видов товаров и всех поставок была принята равной 25 процентам.

Исходя из используемой наценки, эффективность отдельной поставки оценивалась доходностью, рассчитываемой по формуле (2) при  $T = \Delta t_{ij}$ :

$$r_{ij} = \frac{r_0}{\Delta t_{ij}} \cdot 30, \quad j = 1, \dots, N, \quad (8)$$

где  $r_{ij}$  – доходность от работы с  $j$ -й аптекой при  $i$ -й поставке ( % );  $r_0 = 25$  – наценка, используемая предприятием ( % );  $\Delta t_{ij}$  – период между датой  $i$ -й поставки (датой отгрузки товаров) и датой ее оплаты для  $j$ -й аптеки (дни).

Величины  $\Delta t_{ij}$  рассчитывались, исходя из данных о выставленных и оплаченных счетах-фактурах.

В итоге для каждой аптеки был получен ряд доходностей  $r_{ij}$ , характеризующих эффект от  $i$ -й поставки товаров в  $j$ -ю аптеку.

*Расчет ожидаемых доходностей и статистических рисков.* Следующий шаг – исследовать контрагентов с точки зрения их доходностей, корректно рассчитывать ожидаемые доходности и риски. В ходе исследования выяснилось, что контрагентов можно разделить на две группы:

1. Организации, оплачивающие отгруженные товары до следующей поставки, либо в день следующей поставки.

Выяснилось, что для таких контрагентов периоды  $\Delta t_{ij}$  в рассматриваемом случае не превышали семи дней, и доходности  $r_{ij} = 25 / 7 * 30$  были не меньше 107%. Доля этих контрагентов в общем числе составляла 22 %. Периоды  $\Delta t_{ij}$  не перекрывались между собой.

2. Организации, оплачивающие отгруженные товары после следующей поставки.

Для таких аптек периоды между отгрузкой и оплатой  $\Delta t_{ij}$  составляли в среднем больше семи дней. Из-за некоторых представителей именно этой группы рассматриваемое торговое предприятие не могло эффективно развиваться. Доля представителей данной группы была в исследуемый период самой большой – 78%.

Для организаций второго типа периоды  $\Delta t_{ij}$ , как правило, перекрывались, что делало прямой подсчет ожидаемых доходностей за месячный период не вполне корректным.

На участках перекрывания, назовем их смешанными периодами, доходность аптеки целесообразно определять как среднее значение доходностей поставок  $r_{ij}$ , соответствующих накладываемым периодам  $\Delta t_{ij}$  с учетом объемов этих поставок. Поэтому в каждом смешанном периоде, товар, находящийся у контрагента, сам рассматривался как инвестиционный портфель, состоящий из вложений с доходностями  $r_{ij}$ , которые присутствуют в нем в долях, соответствующих объемам поставок, и для расчета доходности такого портфеля, использовалась соответствующая формула.

*Определение долей контрагентов в портфеле поставок.* Важную роль в анализе портфеля поставок, который мы трактуем как инвестиционный портфель, и в определении текущего положения предприятия играет сумма капитала, находящаяся у конкретного контрагента (аптеки) в выбранный период времени. Именно она определяет долю, занимаемую аптекой в искусственном инвестиционном портфеле. Обозначим ее  $S'_{kj}$  для  $j$ -й аптеки второго типа в  $k$ -м смешанном периоде. Рассчитать капитал, вложенный в аптеку в  $k$ -м смешанном периоде, можно по формуле

$$S'_{kj} = \sum_h S_{hj}, j = 1, \dots, N \quad (9)$$

где  $S'_{kj}$  – сумма капитала, вложенного в  $j$ -ю аптеку в  $k$ -м смешанном периоде  $\Omega_k$ ;  $S_{hj}$  – объем  $h$ -й поставки в покупных ценах в  $k$ -м смешанном периоде для  $j$ -й аптеки; их сумма по всем  $h$  дает общий объем поставок, вошедших в указанный смешанный период для  $j$ -й аптеки.

Для предприятий-потребителей первого типа периоды между отгрузкой товаров и их оплатой  $\Delta t_{ij}$  не перекрываются, поэтому выполняются соотношения

$$S'_{kj} = S_{kj}.$$

Для определения долей аптек в инвестиционном портфеле для каждой аптеки находилось математическое ожидание  $S'_j$  сумм капитала, вложенного в эту организацию в каждом периоде. Затем текущая доля  $y_j$   $j$ -й аптеки в искусственном инвестиционном портфеле вычислялась по формуле

$$y_j = \frac{S'_j}{S'} \cdot 100, \quad j = 1, \dots, N, \quad (10)$$

где  $S' = \sum_{k=1}^N S'_k$  – суммарное количество капитала (руб.).

*Оценка риска, анализ текущего состояния и оптимизация.* В соответствии с изложенным общим подходом мерой риска в проводимом анализе являлось среднеквадратичное отклонение доходности от ожидаемого значения (СКО). Чем больше СКО, тем больше вероятность значительного отклонения от ожидаемого, хотя может быть и большого, значения доходности.

Особенность задачи состоит в том, что, если в случае портфеля ценных бумаг активы с малым риском и малой доходностью все-таки приносят прирост капитала, то в рассматриваемой задаче такие активы (аптеки) часто просто становятся неприемлемыми, так как малая доходность (а ее значения становятся «почти гарантированными») приносит убытки. Доходности менее 30 % поставщика не устраивали, поэтому такие портфели исключались из рассмотрения.

При доходностях  $\mu \geq \mu^* = 30\%$  было предложено оценивать вероятность события  $\{r_{портф} < \mu^*\}$ . Эти вероятности оценивались по исходным рассчитанным доходностям  $r_{ij}$  и в случаях достаточно больших значений такие портфели также исключались из рассмотрения. Заметим, что для портфелей, составленных из аптек первой группы, указанные вероятности равны нулю, потому что доходности таких аптек, как отмечалось выше, не опускаются ниже 107%, то есть  $\forall i r_{ij} > \mu^*$ .

Следовало также учесть минимальные и максимальные размеры долей в портфеле для каждого потребителя. Указанные ограничения возникают из-за того, что у каждой аптеки существует максимальный размер поставки, больше которого аптека уже не в состоянии реализовать в срок. Размер максимально возможной доли аптеки в искусственном портфеле рассчитывался, исходя из максимального размера капитала, находившегося в аптеке в рассматриваемом периоде.

Кроме того, оказалось удобным разделить потребителей на несколько групп. Критериями помещения аптеки в ту или иную группу выступали ее средняя доходность  $r'_j$  и риск  $\sigma_j$ .

После обработки данных в программе текущее положение предприятия охарактеризовалось доходностью  $r_{портф}^{тек}$ , равной 32,098 %, и риском  $\sigma_{портф}^{тек}$ , равным 10,726 %. Положение точки на плоскости  $\sigma \theta r$  (точка А на рис. 1) показывает как возможность увеличения доходности портфеля при сохранении рис-

ка на текущем уровне, так и возможность уменьшения риска при неизменной доходности. В случае максимизации доходности при учете ограничений доходность оптимального портфеля  $r_{портф}^{огр*}$  оказалась равной 45,894 % (точка С на рис. 1).

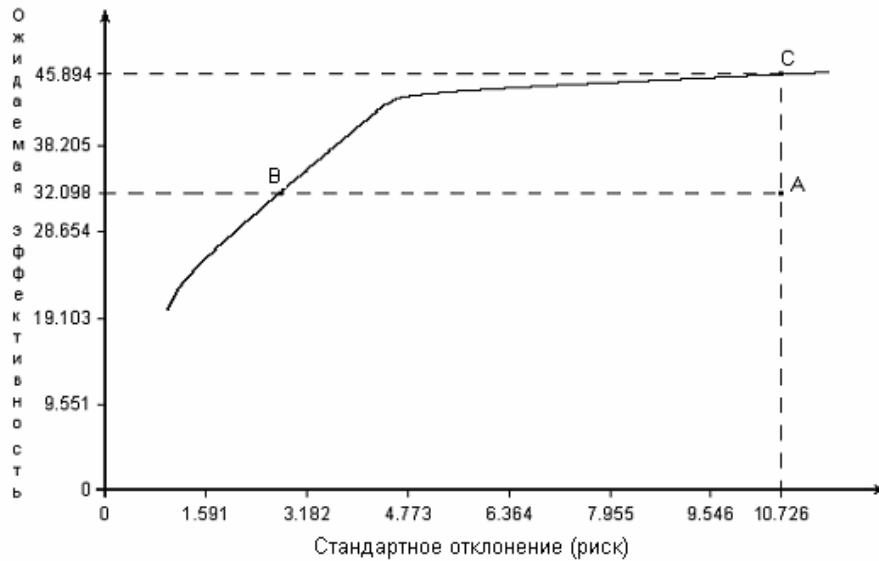


Рис. 1

В случае минимизации риска с учетом ограничений на доли риск оптимального портфеля  $\sigma_{портф}^{огр*} = 2,603$  (точка В на рис. 1). Сплошная линия на рисунке отражает множество всех допустимых эффективных портфелей.

Заметим, что средний период между отгрузкой и оплатой для всего предприятия до оптимизации составляет  $\Delta t^{тек} = 23,37$  дня, а после оптимизации  $\Delta t^{огр*} = 16,34$  дня. Таким образом, в результате оптимизации в целом по предприятию средний период между отгрузкой товаров и их оплатой сократился на 30 %.

### Библиографический список

1. Markowitz H. Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets, Basil Blackwell, Oxford, 1987.
2. Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж. Инвестиции: пер. с англ. – И.:ИНФРА-М, 1997. – XII, 1024с.
3. Nikonov O. On a Set-Valued Dynamic Model of Investment Portfolio Reconstruction // Modeling and Control of Economic Systems: Proc. IFAC Sympos., (2001; Klagenfurt).-New York etc.:Elsevier,2002.-С.181-186.
4. Никонов О.И., Медведева М.А. Экономико-математические методы повышения эффективности логистической системы предприятия // Тр. Всеросс.симп.по эконом.теории/ РАН.УрО.ИЭ; ЦЭМИ; УрГЭУ; УГТУ; УрГУ.- Екатеринбург, 2003.- Ч.1.- С.260-263.